

PRUEBA DE MATEMÁTICA – EJEMPLO 3

Ejercicio 1 (36 puntos)

Indicar si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa.

- i) **(4 puntos)** Si la función $f : R \rightarrow R$ es continua en $x = 0$, entonces es derivable en $x = 0$.
- ii) **(4 puntos)** Si la función $f : R \rightarrow R$ es tal que $f(x) = \begin{cases} x^2 + 5 & \text{si } x \geq 0 \\ 5 & \text{si } x < 0 \end{cases}$, entonces es derivable en $x = 0$.
- iii) **(4 puntos)** Dadas las funciones $f : R \rightarrow R$, $f(x) = x^2$ y $g : R \rightarrow R$, $g(x) = \text{sen}(x)$, entonces la composición $h : R \rightarrow R$, $h = g \circ f$ (primero se aplica f y luego g) es tal que $h(x) = x^2 \text{sen}(x)$.
- iv) **(4 puntos)** Si $f : R \rightarrow R$, es una función derivable en todo su dominio, presenta un mínimo relativo en $x = 0$, entonces $f'(0) = 0$.
- v) **(4 puntos)** Si $f : R \rightarrow R$ es una función derivable en todo su dominio con $f'(0) = 0$, entonces presenta un extremo (mínimo o máximo) relativo en $x = 0$.
- vi) **(4 puntos)** Si simetrizamos un rectángulo cualquiera respecto de una diagonal, los vértices que no están en el eje de simetría resultan uno el simétrico del otro.
- vii) **(4 puntos)** Todo triángulo rectángulo es isósceles.
- viii) **(4 puntos)** La intersección de dos circunferencias distintas tiene a lo sumo dos puntos distintos.
- ix) **(4 puntos)** El conjunto de puntos del plano cuyas distancias a un punto fijo y a una recta fija coinciden es una parábola.

Ejercicio 2 (8 puntos)

Sea la función $f : R \rightarrow R$, $f(x) = e^{x^2}$, entonces:

- a) f es monótonamente creciente en todo su dominio.
- b) f es monótonamente decreciente en todo su dominio.
- c) Existe $x_0 \in R$ tal que f es monótonamente creciente en $(-\infty, x_0)$ y en el resto de su dominio es monótonamente decreciente.
- d) Existe $x_0 \in R$ tal que f es monótonamente decreciente en $(-\infty, x_0)$ y en el resto de su dominio es monótonamente creciente.
- e) Ninguna de las afirmaciones anteriores es verdadera.

Ejercicio 3 (8 puntos)

Sea la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x^2}$, entonces:

- a) f tiene máximo pero no tiene mínimo en \mathbb{R} .
- b) f tiene mínimo pero no tiene máximo en \mathbb{R} .
- c) f tiene máximo y mínimo en \mathbb{R} lo cual es consecuencia del teorema de Weierstrass.
- d) f no tiene máximo ni mínimo en \mathbb{R} .
- e) f tiene máximo y mínimo en \mathbb{R} a pesar de no poderse aplicar el teorema de Weierstrass.

Ejercicio 4 (8 puntos)

Recordando que la derivada de $\text{sen}(x)$ (función seno de x) es $\text{cos}(x)$ (función coseno de x) la derivada de $g(x) = \text{sen}(\text{sen}(x))$ es:

- a) $g'(x) = \text{cos}(\text{cos}(x))$
- b) $g'(x) = \text{sen}(x)\text{cos}(\text{cos}(x))$
- c) $g'(x) = \text{cos}(\text{sen}(x))$
- d) $g'(x) = \text{cos}(x)\text{cos}(\text{sen}(x))$
- e) $g'(x) = \text{cos}(x)\text{sen}(\text{cos}(x))$

Ejercicio 5 (8 puntos)

El límite de $\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}$ cuando x tiende a 1:

- a) vale 0
- b) vale 1
- c) vale 2
- d) vale 3
- e) no existe

Ejercicio 6 (8 puntos)

La recta tangente a la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, en el punto con abscisa $x = 2$, corta el eje de las x en el punto de abscisa:

- a) 0
- b) $\frac{2}{3}$
- c) 1
- d) $\frac{4}{3}$
- e) $\frac{5}{3}$

Ejercicio 7 (8 puntos)

Se considera el triángulo $\triangle ABC$, equilátero. Hay una rotación que lleva el punto A al B , el B al C y el C al A . El ángulo de esa rotación (sin importar el sentido) vale

- a) 0 b) $\frac{\pi}{3}$ *radianes* = 60° *radianes* c) $\frac{\pi}{2}$ *radianes* = 90°
d) $\frac{\pi}{4}$ *radianes* = 45° e) $\frac{2\pi}{3}$ *radianes* = 120°

Ejercicio 8 (8 puntos)

En un sistema ortogonal de coordenadas del plano, los puntos A y B del ejercicio anterior tienen coordenadas $A = (0, 0)$ y $B = (1, 0)$ y el centro de la rotación referida en el ejercicio anterior tiene coordenadas (x, y) . Entonces x vale:

- a) 0 b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{2}{3}$ e) 1

Ejercicio 9 (8 puntos)

En un sistema ortogonal de coordenadas del plano se considera la circunferencia de centro en $A = (1, 2)$ y radio 1. Su ecuación es:

- a) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ b) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0$
c) $x^2 + y^2 - x - 2y + 1 = 0$ d) $x^2 + y^2 - x - 2y + 2 = 0$
e) $x^2 + y^2 - 2xy - 6x - 6y + 10 = 0$