Material de Conocimientos Previos

Tema 1 (de 3): Lógica matemática

Parte 1: Introducción a la lógica funcional

Parte 2: Introducción a la teoría intuitiva de conjuntos

Material preparado por:
Prof. Ana María Tosetti

Revisado y complementado por:
Ing. Freddy Rabín
Catedrático de Matemática

Parte 1: Introducción a la lógica funcional

Proposición

Llamamos proposición a toda oración declarativa que es falsa o verdadera.

Las proposiciones pueden clasificarse en: primitivas o compuestas.

Por ejemplo una proposición simple o primitiva sería "Luis come arroz" y en cambio una compuesta podría ser "Luis come arroz o pollo".

Valor de verdad

Si una proposición (p) es verdadera decimos que su valor de verdad es 1 (asociamos el valor 1 al "verdadero"). Notación V(p) = 1.

Si una proposición (p) es falsa decimos que su valor de verdad es 0 (asociamos el valor 0 al "falso"). Notación V(p) = 0.

Tablas de verdad y operaciones

Definimos en el conjunto de las proposiciones 5 operaciones básicas llamadas: Negación, Conjunción, Disyunción, Implicación y Doble implicación (o equivalencia).

Estas definiciones vienen dadas por las tablas siguientes (también podemos ver las notaciones de cada una) y nos permiten determinar el valor de verdad de una proposición compuesta en función de los valores de verdad de las proposiciones simples que la forman.

Negación[1]	
p	-p
1	0
0	1

Conjunción[2]		
p	q	$p \wedge q$
1	0	0
1	1	1
0	0	0
0	1	0

Disyunción[3]		
p	q	$p \vee q$
1	0	1
1	1	1
0	0	0
0	1	1

[1] La negación se lee comúnmente en el idioma español "no p" y puede encontrarse con la notación $\neg$ p.
[2] La conjunción se lee comúnmente en el idioma español "p y q", ambas proposiciones simultáneamente.
[3] La disyunción se lee comúnmente en el idioma español "p o q", alguna de las proposiciones. Este "o" no es excluyente y muchas veces se menciona como "y/o" para diferenciarlo del "o" excluyente (este no tiene valor de verdad 0 cuando ambas proposiciones son verdaderas y a veces se lo escribe con tilde "ó"). La disyunción definida corresponde al significado de "y/o" el lenguaje cotidiano.

Implicación[4]		
p	**q**	**$p \to q$**
1	**0**	**0**
1	**1**	**1**
0	**0**	**1**
0	**1**	**1**

Doble Implicación[5]		
p	**q**	**$p \leftrightarrow q$**
1	**0**	**0**
1	**1**	**1**
0	**0**	**1**
0	**1**	**0**

Observaciones

- Tenga mucho cuidado con el idioma español, muchas veces no es del todo preciso y se confunden los términos y operaciones lógicas.
- Las operaciones tienen orden de prioridad, nosotros solo usaremos el hecho de que las negaciones se realizan primero, otras separaciones las haremos con paréntesis. Por ejemplo $-p \wedge q$ es lo mismo que $(-p) \wedge q$.
- Es usual que en una implicación $p \to q$, p reciba el nombre de antecedente y q el de consecuente.

Ejercicio

Realizar la tabla de verdad para cada proposición:

i) $p \to (p \vee q)$

ii) $p \wedge (-p \wedge q)$

iii) $q \wedge (-r \to p)$

Definiciones (tautologías, contradicciones y contingencias)

Una proposición es una tautología si y solo si es verdadera para todas las asignaciones de valores de verdad de sus proposiciones componentes Al conjunto de las proposiciones tautológicas lo nombraremos T.

Una proposición es una contradicción si y solo si es falsa para todas las asignaciones de valores de verdad de sus proposiciones componentes. Al conjunto de las proposiciones contradictorias lo nombraremos C.

Una proposición es una contingencia si solo si es verdadera o falsa según las asignaciones de valores de verdad de sus proposiciones componentes.

[4] La implicación se lee comúnmente en el idioma español "si p , entonces q". También mencionamos a p como el que antecede y a q como el consecuente de la implicación.
[5] La doble implicación o equivalencia es muchas veces mencionada como el "si y solo si".

Ejercicio

Escribir las proposiciones en forma simbólica y determinar su valor de verdad:

1) No es verdad que, si 2 +2= 4 entonces, 3+3 =5 o 1+1 =2.
2) Si 2+2 =4, entonces no es verdad que 2+1 = 5 y 5+5 = 10.
3) Si 2+2 = 4 entonces no es verdad que , 3+3 =7 si 1+1 = 2.

Ejercicio

Escribir las proposiciones del ejercicio anterior como proposiciones compuestas de proposiciones primitivas indicando cuáles son éstas y los valores de verdad de cada una.

Reglas y leyes lógicas

Denominamos reglas lógicas a aquellas implicaciones que son tautológicas y denominamos leyes lógicas a aquellas dobles implicaciones que son tautológicas.

En Matemática se utilizan tanto reglas como leyes para dar justificación a nuestros razonamientos[6], en el correr del curso veremos ejemplos de lo antedicho.

El símbolo que usamos en el enunciado de una regla es $\Rightarrow$ ("si ..., entonces ..." en el lenguaje español) y el que usamos en el enunciado de una ley es $\Leftrightarrow$ ("... si y solo si ..." en el lenguaje español).

Ejemplos

- $(p \wedge q) \Rightarrow p$, se denomina Regla de Simplificación.
- $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$, se denomina Ley Conmutativa de la conjunción.

Funciones Lógicas y Cuantificadores

Si consideramos en $\Re$ (conjunto de los números reales), la expresión $3x+1 > 8$ no son proposiciones ya que no son ni verdaderas ni falsas; pero se transforman fácilmente en proposiciones al sustituir la variable por un número real. Por ejemplo $3 (5) +1 >8$ es una proposición verdadera y $3(-2) +1 > 8$ es una falsa, a este tipo de expresiones se las denomina funciones lógicas.

Otra forma de transformar una función lógica en proposición es mediante la cuantificación, hay dos cuantificadores:

[6] Reglas y leyes lógicas son las que usualmente englobamos en teoremas, proposiciones, lemas, etc.

- Cuantificador Existencial ("Existe")

  Ejemplos:

  i) $\exists$ x, x $\in$ Z (conjunto de los números enteros), x > -1 es una proposición verdadera ya que por ejemplo 3 es un entero que cumple que es mayor que -1.

  ii) $\exists$ x, x $\in$ N (conjunto de los números naturales), x < -2 es una proposición falsa ya que no hay ningún natural menor que -2.

- Cuantificador Universal ("Para todo")

  Ejemplos:

  i) $\forall$x, x $\in$ N, x ≥ 0 es una proposición verdadera ya que todos los naturales son mayores o iguales que 0.

  ii) $\forall$ x, x $\in$ Z , x > -1 es una proposición falsa ya que por ejemplo -2 es un entero que no es mayor que -1.

Negación de cuantificadores

Muchas veces en el desarrollo de un curso tenemos que negar ciertas proposiciones, para hacer esto cuando en las proposiciones a parecen cuantificadores se siguen las leyes siguientes:

- $-(\exists x , P(x)) \Leftrightarrow (\forall x , -P(x))$ P(x) es una función lógica.

  Ejemplo:

  $-(\exists x, x \in Z , x > -1) \Leftrightarrow \forall x, x \in Z , x \leq -1$

  Dicho en un lenguaje cotidiano:
  La negación de que hay un entero mayor que -1 es que todos los enteros son menores o iguales que –1.

- $-(\forall x , P(x)) \Leftrightarrow (\exists x , - P(x))$

  Ejemplo:

  $-(\forall x, x \in N, x \geq 0) \Leftrightarrow \exists x, x \in N, x < 0$

  Dicho en un lenguaje cotidiano:
  La negación de que todos los naturales son mayores o iguales que 0 es que hay algún natural menor que 0.

Ejercicio 1

Realizar la tabla de verdad de cada una de las proposiciones siguientes:

1) $-p \wedge -q$ 2) $-(p \leftrightarrow q)$ 3) $p \rightarrow (-p \vee q)$ 4) $(p \wedge q) \rightarrow (-p \wedge q)$

Ejercicio 2

Demostrar:

1) $p \rightarrow -q \Leftrightarrow q \rightarrow -p$ 2) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Ejercicio 3

a) Determinar el valor de verdad de cada uno de las siguientes proposiciones.

1) $(\forall x), x \in \Re, \ |x| = x$ 2) $(\exists x), x \in \Re, \ x^2 = x$

3) $(\forall x), \ x \in \Re, x+3 \geq x$ 4) $(\exists x), x \in \Re, \ x+5 = x$

5) $(\exists x), \ x \in \Re, |x| = 0$

b) Negar las proposiciones anteriores

Ejercicio 4

Sea A=$\{ x \in N / 1 \leq x \leq 10 \}$. Determinar el valor de verdad de cada uno de las siguientes proposiciones.

1) $(\forall x \in A)(\exists y \in A), \ x + y \leq 14$ 2) $(\forall x \in A)(\forall y \in A), \ x + y \leq 14$

3) $(\exists y \in A), (\forall x \in A) \ x + y \leq 14$

Algunas reglas lógicas

1) $[(p \rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$ Modus Ponens (M.P.)

2) $[(p \rightarrow q) \wedge -q] \Rightarrow -p$ Modus Tollens (M.T.)

3) $p \Rightarrow p$ Identidad

4) $(p \wedge q) \Rightarrow p$ Simplificación (Simp.)

5) $p \Rightarrow (p \vee q)$ Adición (Ad.)

6) $[(p \vee q) \wedge -p] \Rightarrow q$ Silogismo disyuntivo (o Modus Tollendo Ponens) (S.Disy.)

7) $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \Rightarrow (p \to r)$ Silogismo Hipotético (S. Hip.)

8) $[(p \to q) \wedge (r \to s) \wedge (p \vee r)] \Rightarrow (q \vee s)$ Dilema constructivo

9) $[(p \to q) \wedge (r \to s) \wedge (-q \vee -s)] \Rightarrow (-p \vee -r)$ Dilema destructivo

Algunas leyes lógicas

1) $-(p \vee q) \Leftrightarrow (-p \wedge -q)$ Ley de De Morgan

2) $-(p \wedge q) \Leftrightarrow (-p \vee -q)$ Ley de De Morgan

3) $(p \to q) \Leftrightarrow (-p \vee q)$ Definición del Condicional

4) $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \to q) \wedge (q \to p)]$ Definición de bicondicional

5) $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (-p \wedge -q)]$ Definición de bicondicional

6) $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$ Idempotencia de la conjunción

7) $(p \vee p) \Leftrightarrow p$ Idempotencia de la disyunción

8) $[(p \wedge q) \to r] \Leftrightarrow [p \to (q \to r)]$ Exportación

9) $(p \to q) \Leftrightarrow (-q \to -p)$ Transposición

10) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$ Conmutativa de la conjunción

11) $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$ Conmutativa de la disyunción

12) $[(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$ Asociativa de la conjunción

13) $[(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$ Asociativa de la disyunción

14) $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ Distributiva de la conjunción respecto de la disyunción .

15) $[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ Distributiva de la disyunción respecto de la conjunción.

16) a) $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$ Leyes de absorción
b) $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$

17) $p \vee -p \Leftrightarrow t$, con $t \in T$ Tercero Excluido

Parte 2: Introducción a la teoría intuitiva de conjuntos

Como le dice el título, realizaremos un desarrollo de la teoría intuitiva de conjuntos, por lo tanto trabajaremos con las nociones intuitivas de los conceptos: conjunto, elemento, pertenece.

Un cierto conjunto en particular puede definirse de dos maneras estas son:

1) Un conjunto está determinado por extensión cuando se nombran todos y cada uno de los elementos del conjunto.
2) Un conjunto está determinado por comprensión cuando se enuncia una propiedad que cumplen todos los elementos de dicho conjunto y solo ellos.

Definición de inclusión

A está incluido en B (o A es subconjunto de B) si y solo si para todo elemento que pertenece a A este pertenece a B.

Simbólicamente $A \subset B \Leftrightarrow \forall x\ (x \in A \Rightarrow x \in B)$

Nota

Aceptaremos que el conjunto vacío (ϕ , conjunto sin elementos) está incluido en todos los conjuntos.

Simbólicamente $\forall A\ ,\ \phi \subset A$.

Definición de igualdad

$A = B \Leftrightarrow A \subset B \ \ y \ \ B \subset A$

Decimos que dos conjuntos A y B son iguales si y solo si todo elemento del primer conjunto pertenece al segundo y recíprocamente todo elemento del segundo pertenece al primero.

Ejercicios

I) Dado A = {a , b ,c d, f } Indicar si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones:

a) $b \in A$ ☐ **b)** $\{b , c\} \subset A$ ☐ **c)** $\{b , c\} \in A$ ☐ **d)** $f \notin A$ ☐

II) Dado A = {a , {b , c }, d, f } Indicar si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones :

a) $b \in A$ ☐ **b)** $\{a\} \in A$ ☐ **c)** $\{b, c\} \in A$ ☐

d) $\{b, c\} \subset A$ ☐ **e)** $\{\{b, c\}\} \subset A$ ☐

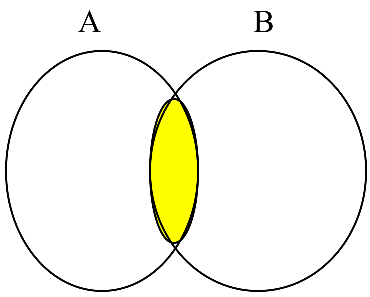
Diagramas de Venn

Es usual representar los conjuntos como óvalos en el plano y en el puntos marcados con cruces para sus elementos. A esta representación la llamamos representación en diagramas de Venn (o simplemente diagramas). De acuerdo con la finalidad se puede completar/alterar esta representación, en ocasiones es beneficioso no indicar los elementos pero sí indicar la cantidad de ellos de cada conjunto, otras veces se puede tomar óvalos más grandes para conjuntos más grandes (debe conocerse qué significa ser grande en el contexto que estemos), etc.

Operaciones con conjuntos

Intersección

Dados A y B conjuntos representados en el diagrama siguiente, la zona sombreada representa el conjunto $A \cap B$ ($\cap$ significa intersección).



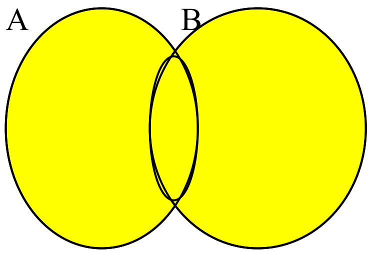
O sea, $A \cap B = \{ x, x \in A \wedge x \in B \}$ [7]

En el lenguaje cotidiano: Dados los conjuntos A y B , A intersección B es el conjunto formado por los elementos en común de A y B.

[7] Puede encontrarse escrito así: $A \cap B = \{ x \in A \ / \ x \in B \}$. El símbolo " / " (se lee "tal que") no es un conectivo lógico, pero es muy usado derivado del idioma español.

Unión de conjuntos

Dados A y B conjuntos representados en el diagrama siguiente, la zona sombreada representa el conjunto $A \cup B$ ($\cup$ significa unión).

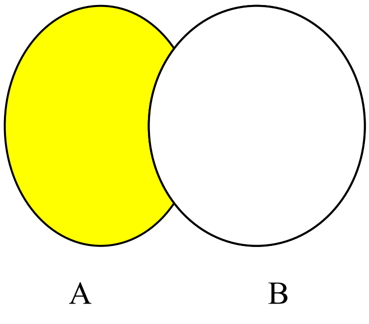


O sea, $A \cup B = \{ x, x \in A \vee x \in B \}$

En el lenguaje cotidiano: Dados A y B conjuntos, A unión B es el conjunto formado por los elementos de A o de B (el "o" empleado es un "o" no excluyente, podemos decir es un "y/o").

Diferencia de conjuntos

Dados A y B conjuntos representados en el diagrama, la zona sombreada representa el conjunto A – B (– significa diferencia) (también se utiliza la notación A \ B).



O sea, $A - B = \{ x, x \in A \wedge x \notin B \}$

En el lenguaje cotidiano: Dados los conjuntos A y B , A menos B es el conjunto formado por los elementos de A que no pertenecen a B.

Algunas demostraciones

I) Demostrar que $A \cap B \subset A$

Para demostrar que $A \cap B \subset A$ tendremos que probar que todos los elementos de $A \cap B$ también son elementos de A.

Dado $x \in A \cap B \xRightarrow[\cap]{\text{por def}} x \in A \wedge x \in B \xRightarrow[\text{simplif}]{\text{por}} x \in A$

II) Para demostrar que una cierta proposición cuantificada universalmente es falsa alcanza con dar un contraejemplo, o sea encontrar un ejemplo que no cumpla con lo planteado o lo que es lo mismo un ejemplo de la negación.

Para demostrar que $A \cup B \subset A$ es falsa construimos un contraejemplo

Si $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{3,4\}$, entonces $A \cup B = \{1,2,3,4\}$ y se cumple que $A \cup B$ no esta incluido en A, pues $4 \in A \cup B \wedge 4 \notin A$.

Ejercicios

1) Dados $A = \{x \in Z / 6 \le x^2 - 3 < 33\}$ $B = \{x \in N / 2 < 2x + 1 < 15\}$

$C = \left\{ x \in N / x = \dot{2} \text{ y } x \le 10 \right\}$

1) Determinar A , B y C por extensión y representarlos a través de diagramas de Venn.
2) Determinar por extensión : i) $A \cap B$ ii) $(A \cap B) \cup C$
iii) $(C - B) \cup (A - B)$ iv) $A \cup B - (C \cap B)$
3) Determinar todos los conjuntos X tales que $X \subset (B - A)$ y $X \cap C = \{2\}$

2) Se le realizó a un grupo de 43 estudiantes un cuestionario que contenía las siguientes preguntas: ¿repite? ; ¿tiene previas? ; ¿posee todos los textos recomendados?. Se obtuvieron los siguientes datos: 1) 12 repiten 2) 15 poseen todos los textos 3) 6 repiten y tienen los textos 4) 17 respondieron no a las tres preguntas 5) 1 sí a las tres 6) 10 respondieron sí a solo dos preguntas y 7) 15 solo a una i) De los estudiantes que no repiten ni tienen todos los textos ¿cuántos tienen previas? ii) De todo el grupo, ¿cuántos tienen previas?.
Sugerencia: Utilice diagramas de Venn indicando en cada conjunto la cantidad de elementos que lo integran.

3) Un conjunto tiene 8 elementos y otro tiene 5 elementos ¿Cuál es el máximo y cuál es el mínimo número de elementos que puede tener $A \cup B$ y $A \cap B$?

4) Indicar con F (falsa) o V (verdadera) cada una de las proposiciones. En el caso de las proposiciones falsas poner un contraejemplo y modificarlas para que sean verdaderas.

1) $A \cup A = A$ ☐ **2)** $A \cup \Phi = \Phi$ ☐ **3)** $A \cup B = B \cup A$ ☐

4) $A \cap \Phi = \Phi$ ☐ **5)** $A \subset A$ ☐ **6)** $A \subset A \cap B$ ☐

7) $A \cap B \subset A \cup B$ ☐

5) Estudia la validez de los razonamientos siguientes[8]:

i)

Algunos hombres son virtuosos
Algunos malos son hombres

Algunos malos son virtuosos

ii)

Los enciclopedistas son malos filósofos
Algunos enciclopedistas son filósofos franceses

Algunos filósofos franceses son malos filósofos

BIBLIOGRAFÍA:

- *Teoría intuitiva de Conjuntos* de Lia Oubiña
- *Teoría y problemas de Matemática Finita* de Seymour Lipschutz (colección Schaum)

[8] La forma en la que se expresan estos razonamientos puede haberse visto en los cursos de filosofía de liceo, por ejemplo el razonamiento de la parte i) también puede expresarse: “Si algunos hombres son virtuosos y algunos malos son hombres, entonces algunos malos son virtuosos”.